

Nowak J.: *Dziecięce budowanie obrazu pojęciowego liczby*, Wychowanie na co dzień, 2011, Nr 1-2, s.28 – 31.

dr Jolanta Nowak

UKW Bydgoszcz

Dziecięce budowanie obrazu pojęciowego liczby

Edukacja matematyczna stanowi ważny obszar kształcenia na poziomie przedszkolnym i wczesnoszkolnym. Od tego, jakie warunki stworzymy dziecku do odkrywania świata matematyki, będzie zależało jego twórcze bądź odtwórcze podejście w uprawianiu tej dziedziny wiedzy. Jako przedmiot nauczania, matematykę należy rozpatrywać w podwójnej perspektywie. Z jednej strony trzeba mieć na uwadze specyfikę matematyki jako nauki, która wyraża się między innymi w operatywnym charakterze pojęć oraz odrębnym kodzie językowym, który pozwala na matematyzację konkretnych sytuacji. Z drugiej zaś należy uwzględnić możliwości psychofizyczne dziecka, jego poziom postrzegania i rozumienia otaczającej rzeczywistości. Takie wielowymiarowe spojrzenie na proces kształcenia matematycznego stwarza stabilne podstawy do wypracowania procedur edukacyjnych, które pozwolą dziecku na samodzielne konstruowanie osobistych struktur wiedzy matematycznej, a przy tym zredukują do minimum negatywne napięcie emocjonalne, towarzyszące pokonywaniu trudności oraz umożliwią osiągnięcie sukcesu.

W uczeniu matematyki wyraźnie rysuje się potrzeba spojrzenia oczami dziecka na otaczającą rzeczywistość. Próba zrozumienia, co dziecko myśli i jak dochodzi do swoich przekonań, pozwala nadać procesowi nauczania-uczenia się charakter intersubiektywnej wymiany. To naturalna ciekawość dziecka, stymulowana przez doznania zmysłowe, wyznacza jego indywidualną drogę rozwoju, także w sferze myślenia matematycznego. Natomiast organizacja przebiegu procesu edukacyjnego wychodząca od dziecka, aranżacja przestrzeni dla dziecięcej aktywności badawczej, warunkuje percepcję i gromadzenie informacji w toku własnych doświadczeń, daje możliwość nadawania osobistych znaczeń pojęciom matematycznym oraz pozwala na samodzielne dokonywanie strukturyzacji wiedzy i tworzenie własnej sieci pojęciowej. Nauczyciel, dzięki zrekonstruowaniu dziecięcego punktu widzenia, może świadomie i planowo wspierać wysiłek intelektualny i aktywność eksploracyjną dziecka.

Celem edukacji matematycznej, niezależnie od szczebla kształcenia, nie jest wyposażenie ucznia w gotowy zestaw definicji, modeli i procedur matematycznego działania, lecz pobudzenie jego aktywności umysłowej, zachęcanie do budowania własnego rozumienia pojęć, zależności i relacji, wdrażanie do poszukiwania prawidłowości, wspieranie w osiągnięciu samodzielności intelektualnej, kształtowanie odporności emocjonalnej w sytuacjach trudnych, problemowych. Tak więc matematykę można przyrównać do skrzynki z narzędziami, które świadomie i celowo użyte, pozwalają lepiej poznać, uporządkować i zrozumieć świat, zgodnie z prawidłami logiki. Ale, jak zauważa H. Broekman [1995, s.22], matematyka to nie tylko efekt końcowy myślenia i badania, lecz również sam proces myślenia i badania. Dziecko uczy się matematyki poprzez obcowanie z otaczającymi je przedmiotami, które rozpoznaje, opisuje, wskazuje różnice i podobieństwa, bada relacje, porządkuje, klasyfikuje i liczy. Jakość i bogactwo zgromadzonych w ten sposób doświadczeń stanowi tworzywo do kształtowania pojęć matematycznych, pozwala stopniowo nadawać intuicyjnemu rozumowaniu coraz bardziej sformalizowaną postać oraz umożliwia tworzenie nowych kategorii w myśleniu i działaniu.

Do głównych zadań edukacyjnych z matematyki, jakie realizujemy na poziomie propedeutycznym, możemy zaliczyć: poznawanie stosunków jakościowych i ilościowych oraz kształtowanie podstawowych pojęć matematycznych. Jednym z takich elementarnych pojęć, które powstają w umyśle małego dziecka jest liczba naturalna.

Dzieci wzrastają wśród liczb. Liczby pojawiają się w codziennych sytuacjach, w postaci wypowiedzianych liczebników bądź jako forma zapisu symbolicznego. Pozwalają one opisać rzeczywistość. Jednak należy mieć świadomość, że liczba jest pojęciem abstrakcyjnym, któremu dopiero człowiek nadaje znaczenie poprzez odniesienie do świata materialnego. Stopniowo wypełnia je treścią, wynikającą z zastosowania liczby w konkretnej sytuacji praktycznej jako cechy ilości, porządku, miary wielkości, wartości, symbolu czy działania.

Proces tworzenia pojęć w umyśle dziecka ma charakter złożony, wielopłaszczyznowy. Polega bowiem na nadawaniu słowom określonego sensu, wypełniania ich osobistym znaczeniem, a także pozwala klasyfikować różne przedmioty, zjawiska, zdarzenia według przyjętych reguł i etykietować je. Jak wskazuje E. Hurlock [1985] „Pojęcia nie są bezpośrednimi danymi sensorycznymi, są raczej wynikiem szczegółowego zbadania i połączenia - wiązania razem lub doczepiania oddzielnych doświadczeń zmysłowych. Wspólne elementy w różnych przedmiotach bądź sytuacjach służą do łączenia tych przedmiotów lub sytuacji w jedno pojęcie”[s.130]. Zatem pojęcie jest ostatecznym rezultatem złożonego aktu myślenia i stanowi osobisty wytwór każdego umysłu. Powstaje w wyniku

przeprowadzenia szeregu operacji umysłowych, począwszy od analizy i syntezy, pozwalających na porównanie wybranych obiektów, aż po abstrahowanie i uogólnianie prowadzące do stworzenia obrazów pojęciowych w umyśle dziecka.

Bazą do tworzenia pojęć są kategorie, do których „możemy przyporządkować przedmioty, wyobrażenia i wydarzenia wykazujące określone podobieństwo”[Mietzel, 2002, s.223]. Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że pojęcia matematyczne, w odróżnieniu od innych pojęć, powstają w wyniku abstrahowania tylko niektórych cech realnych przedmiotów i ich uogólnienia. Główną ich treść stanowią relacje między przedmiotami, czy też ich zastępnikami, oraz pewne sposoby manipulowania nimi [Stucki, 1998, s.60]. Dopełnieniem informacji, tworzących kategorie umysłowe, są dołączane kolejno coraz bardziej złożone sposoby reprezentacji wyobrazeniowej, stanowiące obrazy umysłowe obiektów, zdarzeń, nabytych w toku uprzednich doświadczeń. U młodszych dzieci będą one odzwierciedlały konkretne czynności, podejmowane w świecie materialnym, i zostaną wyrażone w postaci skryptów. Wraz z rozwojem kompetencji poznawczych, pojawiają się reprezentacje ikoniczne w postaci obrazów, rysunków, diagramów, które wymagają od dziecka umiejętności porównywania i wydobywania różnic. Najbardziej zaawansowanym sposobem poznawczego kontaktu z otoczeniem jest posługiwanie się kodem symbolicznym, który wymaga rozumowania na poziomie abstrakcyjnym, z użyciem narzędzi symbolicznych w postaci języka matematycznego. W procesie kształtowania pojęć matematycznych organizacja nowych informacji nie ogranicza się do jednego systemu reprezentacji, lecz występuje w postaci mieszanej jako kompilacja trzech komplementarnych względem siebie systemów kodowania [Nowak, 2010 a, s.574]. Wskaźnikiem rozwoju intelektualnego dziecka jest zdolność integrowania odmiennych systemów reprezentacji oraz swoboda przechodzenia z jednego systemu reprezentacji na inny [Siwek, 2004, s.156-157]. Zatem pojęcia matematyczne, podobnie jak cała matematyka, mają charakter operatywny, gdyż wymagają podjęcia całego ciągu operacji: począwszy od działań na konkretach, poprzez stopniowe ich uwewnętrznienie w postaci czynności wyobrazeniowych aż po operacje abstrakcyjne. Przedstawiony tu proces interioryzacji stanowi swoisty mechanizm kształtowania pojęć. Warto w tym miejscu podkreślić, że dzieci nie myślą pojęciami matematycznymi, ale tworzą własne obrazy pojęciowe, które stanowią reprezentację umysłową dziecięcych doświadczeń w świecie rzeczywistym. Sposób tworzenia kategorii umysłowych, ich skład, struktura jak również ciągła aktualizacja, przebudowa i modyfikacja jest ściśle uzależniona od poziomu rozwoju wyższych funkcji psychicznych dziecka.

Początków dziecięcego liczenia można doszukiwać się w charakterystycznym zachowaniu małego dziecka, które uważnie obserwuje otoczenie, a następnie stara się wyłonić z niego poszczególne elementy i nazwać je. Pokazując obiekty, dziecko często zamiennie używa nazw właściwych dla poszczególnych przedmiotów, zaimków wskazujących bądź liczebników. Wiedzione wewnętrzną intuicją, każdemu elementowi przyporządkowuje tylko jeden liczebnik. Początkowo powtarza te nazwy, ale w miarę poszerzania zakresu liczebników, zaczyna świadomie kontrolować kolejność ich wypowiedzania. Dbą również o to, aby nie pominąć żadnego elementu przy liczeniu. Można zatem powiedzieć, że przeliczanie jest pierwszym doświadczeniem w użyciu liczb przez dziecko. Pozwala ono wyczuwać wzory nazewnicze liczb, stosowane w naszym systemie numerycznym. Jednak to, że dzieci liczą do 10 czy 20 nie oznacza, że rozumieją, jakie wartości kryją się za każdą z wymienionych liczb. Świadczy to jedynie o znajomości liczebników i uchwyceniu pewnego rytmu podczas ich wymieniania [por. Siwek, 2004, s.161; Matzarakis, 2009, s.25].

Dzięki recytowaniu nazw liczb po kolei, dzieci intuicyjnie poznają to, co nazywamy aspektem porządkowym liczby. Liczba początkowo kojarzona jest ze słowem wymawianym jako część serii. Stanowi ona pojedyncze ogniwo w łańcuchu liczbowym. W toku działań na konkretach, liczebnik porządkowy pozwala dziecku określić, który z kolei element w danym zbiorze jest wyodrębniony. Jednak, u podstawy rozumienia pojęcia liczby w aspekcie ordynalnym, co podkreśla Z. Cydzik [1986] „leżą stosunki ilościowe zachodzące między liczbami w ciągu liczb naturalnych”[s.64]. Zatem sprawność w nazywaniu kolejnych liczebników to za mało, aby wyznaczyć właściwe miejsce danej liczbie w ciągu liczbowym. Tu potrzebne jest zrozumienie dwóch podstawowych relacji, jakie zachodzą między daną liczbą a liczbami sąsiednimi. Należy zatem stwarzać dziecku okazje do przeliczania różnych przedmiotów i porządkowania ich w układzie wzrastającym lub malejącym, co pozwoli mu na intuicyjne wychwycenie pewnych prawidłowości (zasada przechodniości), a tym samym uzmysłowi znaczenie wymawianych liczebników.

Jak zauważa E. Gruszczyk-Kolczyńska [1997, s.37], w trakcie przyporządkowywania: gest – obiekt - liczebnik, dziecko powoli zaczyna dostrzegać, że ostatni z wymienianych liczebników ma podwójne znaczenie. Nazywa bowiem nie tylko wskazywany przedmiot, ale także odnosi się do wszystkich elementów zbioru i określa ich liczbę. W miarę nabywania doświadczenia w przeliczaniu dowolnych przedmiotów dziecko orientuje się, że ułożenie elementów nie wpływa na liczebność zbioru. Stopniowo też abstrahuje od różnic jakościowych, skupiając się na wspólnej cesze ilościowej, którą wyraża liczba kardynalna zbioru. Kształtowaniu poczucia „jest tyle” sprzyja powtarzający się rytm liczenia oraz

określona przestrzeń czasowa dla wykonywanej czynności. Osiągnięcie intuicyjnego rozumienia liczebników głównych stanowi, zdaniem D. Wooda [2006, s.216], moment zwrotny w myśleniu matematycznym małego dziecka. Liczby uzyskują nowe znaczenie jako symbole, wyrażające moc zbioru. Porównywanie liczebności zbiorów, wyróżnianie zbiorów równolicznych, wskazywanie zbiorów o określonej liczbie elementów, grupowanie obiektów zgodnie z podaną liczbą, to tylko niektóre propozycje czynności, pozwalające dzieciom uchwycić istotę aspektu mnogościowego liczby.

Wyjście poza przeliczanie jest kolejnym ważnym krokiem na drodze konstruowania pojęcia liczby naturalnej w umyśle dziecka. Stanowi bowiem warunek niezbędny do zrozumienia arytmetyki. Grupowanie po 5, po 10, pozwala znacznie szybciej i z większą pewnością ustalić całkowitą liczbę elementów, aniżeli przeliczanie po kolei. Istotną kwestią jest więc postrzeganie liczby jako „całości”, a nie jako części procesu liczenia. Możliwe jest to dzięki tworzeniu rozpoznawalnych wzorów z przedmiotów. Zapamiętanie kształtu wzoru daje możliwość określenia liczby elementów bez przeliczania. To z kolei ułatwia dostrzeżenie związków zachodzących między liczbami, co stanowi podstawę wykonywania obliczeń. Umiejętność rozpoznania wzorów, będących efektem ustrukturyzowania elementów, prowadzi do dostrzegania prawidłowości. Ważne jest, aby dzieci nie operowały liczbami w sposób mechaniczny, ale zauważały reguły i świadomie je stosowały. Odkrycie wzoru daje dziecku pewność działania. Doświadczenie liczenia w strukturze zapewnia większą świadomość relacji z innymi liczbami, pozwala przewidywać, projektować, bezkolizyjnie przejść od konkretnego do abstrakcji [Nowak, 2010 b, s.210-211].

Ważnym zagadnieniem, związanym z budowaniem rozumienia liczby naturalnej, jest poznanie jej wewnętrznej struktury. Początkowo dzieci badają skład liczby poprzez rozkładanie określonej ilości elementów na dwie części, tak, aby pokazać wszystkie możliwe kombinacje ustawień. Manipulowanie konkretnymi przedmiotami stanowi doskonałą okazję do wychwycenia prawidłowości, polegającej na tym, że jeżeli zwiększymy liczbę elementów w jednej grupie, to automatycznie zmniejszamy o tyle samo liczbę elementów w drugiej grupie, przy założeniu że dysponujemy stałą liczbą elementów. Odbiciem owych działań na materiale konkretnym są reprezentacje enaktywne, które powstają w umyśle dziecka. Stanowią one fundament dla zrozumienia aspektu algebraicznego liczby. Zapis symboliczny, wyrażający możliwe warianty rozkładu określonej liczby na dwa, trzy lub więcej składników, uświadamia dzieciom, że „ta sama liczba kardynalna może być tworzona na różne sposoby, ale zawsze będzie to „jedna” liczba” [Wood, 2006, s.217]. Wzbogacenie obrazu pojęciowego liczby o

wymiar algebraiczny przybliży dziecko do wykonywania działań arytmetycznych i zapoznaje z podstawowymi własnościami tych działań.

W miarę poszerzania obszaru dziecięcych eksploracji, wylaniają się coraz to nowe problemy, które wymagają nabycia kolejnych kompetencji matematycznych. Sprawdzanie: jaki jestem duży, ile kroków jest od ściany do okna w pokoju, co jest cięższe: miś czy lalka, kierkuje uwagę dzieci na pomiar różnych wielkości. Postrzegając i porównując przedmioty, początkowo używamy określeń typu: długi – krótki, ciężki – lekki, wysoki – niski, co pozwala szeregować obiekty według podanych cech wielkościowych. Stopniowo, w miarę poszerzania pola doświadczeń, podejmujemy próby szacowania na „oko”, porównując dany przedmiot z wielkością przyjętą umownie za jednostkę miary. Ważnym odkryciem dla dziecka jest stwierdzenie, że im mniejszą jednostkę pomiaru ustalimy, tym więcej razy będzie się ona mieściła w badanej wielkości. Poprzez tego typu ćwiczenia dzieci konstruują podstawy rozumienia aspektu miarowego liczby. Początkowo jednostki miary dobierane są w sposób dowolny, z czasem dopiero dzieci zaczynają poznawać i korzystać ze standaryzowanych jednostek pomiaru. Według H. Siwek [2004, s.164], jest to najtrudniejszy aspekt liczby, ale też najbardziej ogólny, uniwersalny, stanowiący podstawę do wprowadzania liczb wymiernych, całkowitych i rzeczywistych.

Użycie liczb w różnych codziennych sytuacjach wymaga często zapamiętania. Jeżeli liczb jest więcej, bądź trzeba dokonać na nich szeregu operacji matematycznych, wówczas niezbędne jest zanotowanie tych działań. Cyfry, których używamy w zapisie to symbole arbitralne, które nie mają żadnej logiki, nie wyglądają jak pojęcia, które oznaczają. Dziecku trudno dostrzec związek pomiędzy zapisem graficznym liczb, a wartościami, jakie one wyrażają. Dlatego też, przyswojenie przez dziecko nazw kolejnych liczb i ich pisemnego zapisu symbolicznego nie może być traktowane równoznacznie ze zrozumieniem struktury systemu dziesiętnego. Samo współwystępowanie dwóch systemów wymaga znacznego wysiłku ze strony dziecka, aby je opanować. Szczególnie dużym wyzwaniem jest przyswojenie liczb w zakresie drugiej dziesiątki, gdzie sposób zapisu za pomocą cyfr znacznie różni się od sposobu wymawiania nazw tych liczb. Często dorośli nie dostrzegają tego problemu i operują swobodnie zapisem symbolicznym i werbalnym systemem nazywania liczb, oczekując, że dzieci będą rozumiały ich sens. Stąd ważne jest zorganizowanie różnorodnych ćwiczeń: począwszy od działań na konkretnych przedmiotach, które grupujemy po 10, poprzez wykonywanie schematycznych rysunków, przedstawiających dziesiątki i jedności, aż po zapis symboliczny. Taka sekwencja czynności: od konkretnego do abstrakcji, służy wytworzeniu w świadomości dzieci reprezentacji enaktywnej oraz ikonicznej

tworzonego pojęcia, co stanowi podstawę do zbudowania rozumienia dziesiętkowego systemu pozycyjnego, wyrażonego na poziomie abstrakcyjnym za pomocą symbolicznego kodu matematycznego [Nowak, 2010 b, s.211].

Jak wynika z wcześniejszych rozważań, proces tworzenia pojęcia liczby naturalnej wymaga aktywności badawczej, łączenia wielu doświadczeń zmysłowych, które stanowią tworzywo do dalszej obróbki intelektualnej. Aby w umyśle dziecka powstało pojęcie liczby naturalnej, musi dojść do scalenia wszystkich omówionych aspektów [por. Siwek, 2004, s.165; Stucki, 1998, s.130]. Rolą nauczyciela jest zatem tworzenie różnorodnych sytuacji edukacyjnych, w których dzieci będą miały okazję obserwować, manipulować, przeliczać, porządkować, porównywać czy dokonywać pomiarów. Podjęte działania z użyciem konkretów będą stanowiły dla nich materialną reprezentację abstrakcyjnych kategorii pojęciowych. Ponadto dostarczą kontekstu znaczeniowego do rozmów na temat wykonanych czynności, poczynionych obserwacji, z wykorzystaniem języka matematycznego. Nie zapominajmy, że możliwość konfrontacji własnego sposobu myślenia w dialogu z rówieśnikami ma nieocenioną wartość poznawczą. Wymaga bowiem umiejętności precyzyjnego werbalizowania zjawisk, procedur, relacji, prawidłowości, z zachowaniem dbałości o logiczną poprawność wyrażanych sądów. Uczy sztuki argumentowania, uzasadniania własnych racji, a także umiejętności podążania tokiem rozumowania odmiennym od przyjętego przez dziecko. Uruchamia tym samym procesy, prowadzące do aktywnej konstrukcji rozumienia pojęć, budowania osobistej wiedzy matematycznej.

Drogi Nauczycielu, matematyka nie musi być trudna. Daj dziecku czas na własną obserwację, doświadczanie, pozwól mu samodzielnie myśleć i rozwiązywać problemy matematyczne, stwórz przestrzeń edukacyjną, która będzie prowokowała do podjęcia aktywności oraz zadbaj o właściwy dobór metod pracy, odpowiednio do możliwości i potrzeb psychofizycznych wychowanka. Kluczem do sukcesu niech będzie nauka w toku zabawy oraz towarzyszący jej dialog, i to zarówno na płaszczyźnie nauczyciel – dziecko, jak i dialog rówieśniczy. Ważne jest bowiem, aby w równym stopniu zaangażować umysł, ciało i emocje dziecka, co sprawi, że odkrywanie świata matematyki stanie się fantastyczną przygodą intelektualną.

Bibliografia:

- Broekman H., *Zmieniający się obraz matematyki dla młodzieży szkolnej*, Warszawa 1995.
Cydzik Z., *Nauczanie matematyki w klasie pierwszej i drugiej*, Warszawa 1986.

Gruszczyk-Kolczyńska E., *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, Warszawa 1997.

Hurlock E., *Rozwój dziecka*, Warszawa 1985.

Matzarakis D., *Jak moje dziecko może nauczyć się logiczno-matematycznego myślenia?*, Kielce 2009.

Mietzel G., *Psychologia kształcenia*, Gdańsk 2002.

Nowak J., *Papierowe składanki czyli technika orgiami w kształtowaniu pojęć geometrycznych*, [w:] *Edukacja dziecka – mity i fakty*, Jaszczyszyn E., Szada – Borzyszkowska J. (red.), Białystok 2010 (a).

Nowak J., *Działaj – odkrywaj – konstruuj czyli kształtowanie pojęcia liczby naturalnej w umyśle dziecka*, [w:] *Mathematical Education In a Context of Changes In Primary School*, Novak B. (red.), Olomouc 2010 (b).

Siwek H., *Kształcenie zintegrowane na etapie wczesnoszkolnym. Rola edukacji matematycznej*, Kraków 2004.

Stucki E., *Nauczanie matematyki w klasach niższych. Część I.*, Bydgoszcz 1998.

Wood D., *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*, Kraków 2006.

Słowa kluczowe: liczba naturalna

Streszczenie:

Kształtowanie pojęcia liczby naturalnej jest jednym z podstawowych zadań w edukacji matematycznej małego dziecka. Wymaga ono stwarzania wielu sytuacji do gromadzenia doświadczeń, które pozwolą skonstruować dziecku rozumienie liczby w podstawowych jej aspektach.

Key words: natural number

Summary:

Formulating the notion of a natural number in a child's mind is one of the fundamental tasks in teaching mathematics to young children. It requires that a number situations be created facilitating acquisition of experiences allowing a child to gain understanding of a number in its elementary aspects.

Dr Jolanta Nowak jest pracownikiem naukowo-dydaktycznym w Instytucie Pedagogiki Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy.