

Od dialogu do wiedzy w matematyce **From dialogue to knowledge in mathematics**

Abstrakt

Możliwość konfrontacji własnego sposobu myślenia w dialogu z nauczycielem i rówieśnikami ma nieocenioną wartość poznawczą. Wymaga bowiem umiejętności precyzyjnego werbalizowania zjawisk, procedur, relacji, prawidłowości, z zachowaniem dbałości o logiczną poprawność wyrażanych sądów. Uczy sztuki argumentowania, a przy tym doskonali umiejętność posługiwania się językiem matematycznym dla uzasadnienia własnych racji. Uruchamia procesy, prowadzące do aktywnej konstrukcji rozumienia pojęć, budowania osobistej wiedzy matematycznej.

Słowa kluczowe: edukacja matematyczna, nauczanie dialogowe

Abstract

Opportunity to confront their own way of thinking in dialogue with the teacher and peers is an invaluable educational value. It requires precise skills verbalise phenomena, processes, relationships, correctness, maintaining attention to logical correctness expressed courts. Teaches the art of arguing, and at the same time improves the ability to use mathematical language to justify one's position. Starts processes, leading to an active construction of understanding of concepts, building a personal knowledge of mathematics.

Key words: mathematics education, dialogic teaching

1. Edukacja matematyczna – radość odkrywania czy reżim odtwarzania

Matematyka od lat jawi się w umysłach większości społeczeństwa niczym Mount Everest, na który niewielu się porywa, a tylko nielicznym udaje się go zdobyć. Jest to obszar wiedzy tajemnej, którą są w stanie pojąć tylko ci, którzy zostali wyposażeni przez matkę Naturę w zdolności określane mianem umysłu ścisłego. Cóż zatem mają zrobić pozostali nieszczęśnicy zaliczani do grona humanistów? Otóż, nawet nie próbują podjąć wyzwania, gdyż gorzki smak porażki nader często towarzyszył im na lekcjach matematyki.

Wśród przyczyn opisanej sytuacji przede wszystkim wskazuje się na sposób organizacji procesu edukacyjnego, ze szczególnym zwróceniem uwagi na stan jej nauczania w klasach I-III szkoły podstawowej. Z badań prowadzonych pod kierunkiem Mirosława Dąbrowskiego w latach 2006-2011 na terenie całej Polski jednoznacznie wynika, że: „W praktyce szkolnej dominują metody podające. Nauczyciel jest głównym przekaznikiem wiedzy matematycznej, a zwłaszcza gotowych algorytmów i schematów postępowania, zaś uczeń ma je zapamiętać i stosować. Dlatego dużą część czasu na lekcjach poświęca się treningowi technik rachunkowych” (Fedorowicz, Sitek, 2011, s. 155). W miarę, jak edukacja matematyczna obrasta szkolnymi procedurami, które stanowią archaiczne klisze, ginie gdzieś dziecięca ciekawość i radość w odkrywaniu świata. Uczniowie przestają wątpić, pytać, dociekać, bo przecież z uczniami się nie rozmawia, lecz się ich wyposaża w gotowy zestaw pojęć i modeli matematycznego działania. Zdaniem Davida Wooda (2009) „kształcenie zbyt często skupia się na procedurach i lekceważy konieczność rozumienia pojęciowego” (s. 209). Kultura asymilacji bardzo silnie zdeterminowała proces kształcenia matematycznego i w efekcie doprowadziła do zapaści w obszarze kompetencji matematycznych naszych uczniów, co potwierdzają wyniki uzyskane w przywołanych już krajowych badaniach umiejętności podstawowych trzecioklasistów OBUT oraz w badaniach międzynarodowych PISA. Nasi uczniowie nie radzą sobie w codziennych sytuacjach wymagających samodzielnego i kreatywnego myślenia, rozumowania z uwzględnieniem zasad logiki, wychwytywania reguł,

dostrzegania prawidłowości, przewidywania rezultatów działania, komunikowania się za pomocą języka matematycznego.

Na jakość edukacji matematycznej niewątpliwie wpływ ma wiedza merytoryczna, psychologiczna, pedagogiczna i dydaktyczna nauczycieli oraz ich poglądy i przekonania na temat matematyki jako nauki, procesu nauczania, a przede wszystkim roli nauczyciela i ucznia w procesie edukacyjnym. Z badań prowadzonych przez Edytę Gruszczyk-Kolczyńską w latach 2006-2010 w ramach dwóch projektów badawczych finansowanych przez MNiSW (Fedorowicz, Sitek, 2011, s. 329-330) wynika, że nauczanie adresowane jest do przeciętnego ucznia, co w szerszej perspektywie przyczynia się do tłumienia aktywności poznawczej i powstania blokad w uczeniu się matematyki. Zdumiewa fakt, że zdecydowana większość nauczycieli wychowania przedszkolnego i edukacji wczesnoszkolnej nie dostrzega dzieci uzdolnionych matematycznie, a ci pedagodzy, którzy zauważają w przestrzeni klasy uczniów o matematycznym ukierunkowaniu umysłu, nie wiedzą, jak rozwijać ten rodzaj zdolności. W komentarzu do badań E. Gruszczyk-Kolczyńska zwraca uwagę, aby edukować nauczycieli w zakresie rozwoju umysłowego najmłodszych, gdyż bez odpowiedniej wiedzy psychologicznej szkolna edukacja matematyczna będzie nadal rozmijać się z naturalnym rozwojem kompetencji umysłowych uczniów.

Niepokój budzą również wyniki badań przyszłych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej przeprowadzone w ramach Teacher Education and Development Survey-Mathematics 2008, w skrócie TEDS-M 2008 (Czajkowska, Jasińska, Sitek, 2010). Jak wynika z Raportu, studenci – przyszli nauczyciele klas początkowych wykazują się niewystarczającą wiedzą merytoryczną oraz z zakresu dydaktyki matematyki. Nie jest to dobry prognostyk, bowiem młodzi nauczyciele stają się bezradni wobec rozwiązywania zadań nieschematycznych, doboru odpowiedniego modelu do opisanej sytuacji zawierającej kontekst realistyczny czy też łączenia ze sobą różnych elementów wiedzy i wyciągania wniosków.

W świetle przywołanych danych empirycznych można mieć uzasadnione obawy, iż niski poziom kompetencji merytoryczno-dydaktycznych obecnych jak i przyszłych nauczycieli stanowi słabe ogniwo edukacji matematycznej w naszych szkołach. Konsekwencją tej sytuacji jest pogłębiający się analfabetyzm matematyczny uczniów, który wyraża się brakiem elementarnych umiejętności w posługiwaniu się narzędziami matematycznymi wszędzie tam, gdzie wymagają tego potrzeby codziennego życia.

2. Uczenie się matematyki jako proces kontekstowy i interaktywny

W dzisiejszej szkole nadal aktualna jest metafora umysłu jako zbiornika (Bereiter, 2002, s. 20), który wypełnia się ściśle określonymi treściami zadekretowanymi w dokumentach programowych, a później następuje sprawdzenie poziomu ich przyswojenia za pomocą standaryzowanych testów. Taka perspektywa postrzegania kształcenia wyraźnie fetyszyzuje efekty edukacji ujęte w kategorii instrumentalnej, a deprecjonuje przebieg procesu nauczania-uczenia się. Jak wskazują najnowsze badania z obszaru psychologii poznawczej, uczenie nie jest jedynie prostym przyswajaniem informacji, a uczeń nie jest pasywnym odbiorcą wiedzy rozdzielanej przez nauczyciela. Proces uczenia się zachodzi w wyniku przetwarzania informacji, ich interpretowania, co prowadzi do uchwycenia sensu i tworzenia nowych artefaktów poznawczych. Uczniowie tworzą konstrukcje myślowe, które – z jednej strony – są silnie spersonalizowane, z drugiej zaś – odpowiadają zewnętrznej rzeczywistości. Powstałe struktury wiedzy to efekt bogactwa i różnorodności doświadczeń edukacyjnych zarówno o charakterze indywidualnym, jak i społecznym.

John Seely Brown, Allan Collins i Paul Duguid (1989) na podstawie prowadzonych przez wiele lat badań w obszarze edukacji matematycznej stwierdzili, że zarówno myślenie, jak i uczenie się nie są procesami „zamkniętymi” w umyśle, ale mają charakter interaktywny i są silnie osadzone w kontekście. Ich zdaniem, konstruowanie osobistych struktur myślowych

jest „po części wynikiem działania, kontekstu i kultury, w której wiedza ta jest rozwijana i wykorzystywana” (s. 32). J.S. Brown sugeruje, że to, co uczniowie odbierają jest wytworem kultury otoczenia, a nie wyraźnego nauczania. Stąd tak ważne jest, by szkoła przede wszystkim skupiła swoje wysiłki na projektowaniu środowiska uczenia się, które będzie autentyczne, złożone i bogate, a nie wymyślone, uproszczone i ograniczające.

Warto tu odwołać się do idei i poglądów Hansa Freudenthala – wybitnego dydaktyka matematyki, twórcy i propagatora koncepcji realistycznego nauczania matematyki (Realistic Mathematics Education). Na gruncie polskim propaguje tę ideę między innymi profesor Stefan Turnau, który wspólnie z nauczycielką matematyki Iwoną Turnau opracował nowatorski program nauczania dla II etapu edukacyjnego – „Matematyka realistyczna” (2012). Przymiotnik „realistyczna” wskazuje, że w rozwijaniu myślenia matematycznego stosuje się częste odwołania do świata realnego, który przemawia do wyobraźni ucznia, a tym samym stanowi naturalny kontekst uczenia się. Świat fizyczny jest tworzywem, którego badanie pozwala konstruować schematy wyobrażeniowe, abstrahować pojęcia, doskonalić operacje logiczne, a równocześnie stanowi obszar urzeczywistniania modeli matematycznych. Jak podkreśla H. Freudenthal (1984) „Struktury matematyczne zostały wynalezione po to, by je stosować w tych kontekstach, w których się narodziły” i dalej dodaje: „Rozpoczynanie od struktur matematycznych ubogich może oznaczać, że nie dojdziemy do struktur matematycznych bogatych, które stanowią prawdziwy cel nauczania” (s. 10-11). Ważne jest, aby uczniowie aktywnie odkrywali, budowali pojęcia i struktury matematyczne w działaniu z wykorzystaniem doświadczenia, wyobraźni i intuicji oraz nauczyli się matematyki „praktycznej”, która pozwoli im zmierzyć się z wyzwaniami codzienności: analizować zebrane informacje, wyciągać wnioski z przyjętych założeń i weryfikować uzyskane wyniki w nowych sytuacjach. Dzięki temu będą potrafili odnaleźć się i twórczo funkcjonować w nowych, odmiennych kontekstach – matematycznych i niematematycznych.

Nie bez znaczenia dla efektywności edukacyjnej jest także społeczny wymiar uczenia się. Erik De Corte (2013), profesor Uniwersytetu w Leuven (Belgia), ekspert w dziedzinie budowania zaawansowanych środowisk nauczania, mówi wprost: „Skuteczne uczenie się to nie działanie wyłącznie indywidualne, ale w gruncie rzeczy rozproszone, obejmujące danego ucznia, inne osoby obecne w środowisku uczenia się oraz dostępne zasoby, technologie i narzędzia” i dodaje: „konstruowanie indywidualnej wiedzy zachodzi przez interakcje, negocjacje i współpracę” (s. 88-89). Nowoczesna edukacja wymaga zatem odejścia od modelu pedagogicznego opartego na instrukcjonizmie i skierowania się w stronę nowego paradygmatu, jakim jest konstruktywizm społeczny. Nieodzownym warunkiem organizacji procesu uczenia się jest uwzględnienie pól społecznej wymiany obejmujących relacje nauczyciel – uczeń oraz interakcje rówieśnicze.

W tradycyjnym kształceniu relacje nauczyciela z uczniem naznaczone są asymetrią wiedzy i władzy. Dorosły jest zaangażowany w poszerzanie repertuaru dziecięcych zachowań, wspieranie, motywowanie dziecka, stymulowanie adekwatnie do potrzeb i możliwości. Z kolei uczeń wnosi do tego pola wymiany zasobów odmienną perspektywę postrzegania i rozumienia rzeczywistości, inny poziom wrażliwości, niestandardowość myślenia. Aby podnieść wartość dydaktyczną tej interakcji, pobudzić ucznia do refleksji nad własnym myśleniem, nauczyciel powinien umieć spojrzeć oczami dziecka na otaczającą rzeczywistość. Próba zrozumienia, co dziecko myśli i jak dochodzi do swoich przekonań, pozwala nadać procesowi nauczania-uczenia się charakter intersubiektywnej wymiany. Zamiast wyręczać i kontrolować nauczyciel powinien wspierać wychowanka, wykazując przy tym gotowość podążania za nim w procesie nabywania kompetencji matematycznych. Niestety, często oczekiwania nauczyciela nie wpisują się w potrzeby i możliwości dziecka, co stanowi istotne źródło niepowodzeń w uczeniu się matematyki. W tej sytuacji nawet obniżenie poziomu wymagań nie przyczyni się do zrozumienia pojęć i procedur matematycznych. Georg Hüter

(2009) – niemiecki neurobiolog – zwraca uwagę: „Aby dzieciom udało się odnaleźć w wirze wymagań, ofert i oczekiwań, potrzebują pomocy w orientacji, a więc wzorców zewnętrznych oraz wewnętrznych obrazów przewodnich, które dają im oparcie i stanowią miarę podejmowanych decyzji” (s. 80). Stąd rolą nauczyciela jest budowanie rusztowania poprzez dostosowanie oferty edukacyjnej do aktualnych kompetencji dziecka oraz zarysowanej mapy gotowości do podjęcia nowych wyzwań.

Innym typem interakcji w przestrzeni edukacyjnej klasy są relacje rówieśnicze. Mogą one przybrać różnorodne formy, w zależności od poziomu wiedzy i umiejętności, jakimi dysponują partnerzy. Z jednej strony, mamy relację opartą na wzajemności, gdzie wiedza i doświadczenie dzieci są podobne, z drugiej zaś mogą się tworzyć związki rówieśnicze, w których dzieci różnią się od siebie poziomem kompetencji w wybranym obszarze. Mówimy wówczas o tutoringach rówieśniczym, gdzie bardziej kompetentne dziecko wciela się w rolę eksperta, drugie natomiast jest nowicjuszem. Ważna jest przy tym przemienność ról. Uczniowie, pracując w parach lub niewielkich grupach, rozwiązują wspólnie zadania problemowe, a powstałe w toku interakcji strategie myślenia i działania są internalizowane, co prowadzi do jakościowej przemiany dziecięcego rozumowania. Występująca współpraca i kooperacja stanowi źródło wzajemnej inspiracji, pobudza do podjęcia wyzwań intelektualnych, uruchamia zachowania nowego typu.

Niestety, jak pokazuje praktyka dydaktyczna, a potwierdzają to wyniki Raportu TIMSS i PIRLS 2011 „Osiągnięcia szkolne polskich trzecioklasistów w perspektywie międzynarodowej” przywołane przez Krzysztofa Konarzewskiego (2012, s. 75), praca zespołowa uczniów jest marginalizowana w przestrzeni klasy. Najczęściej uczniowie pracują nad zadaniem całym oddziałem (68% zajęć) bądź indywidualnie i w małych grupach (62% zajęć), ale zawsze pod kierunkiem nauczyciela. Nasza praktyka nauczania sięga głównie do dyrektywnego zarządzania uczniem i procesem uczenia się. Natomiast praca indywidualna lub zespołowa nad zadaniem bez nadzoru nauczyciela wystąpiła jedynie podczas 40% badanych zajęć. Wyniki dotyczące organizacji metod pracy w cytowanych już wcześniej badaniach OBUT prowadzonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną pozwalają na dalszą, pogłębioną interpretację przedstawionych danych. Wskazują jednoznacznie, że na zajęciach matematycznych dominuje praca całą klasą oraz indywidualna, która najczęściej wiąże się z wypełnianiem przez uczniów zeszytów ćwiczeń czy kart pracy. Blisko połowa badanych nauczycieli deklaruowała – co prawda – stosowanie pracy w parach, jednak bezpośrednia obserwacja zajęć z edukacji matematycznej tego nie potwierdziła. Natomiast zupełnie niedoceniana przez nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej była praca zespołowa w kilkusobowych grupach, której poświęcono zaledwie 4,1% czasu zajęć (Dagieli, Żytko, 2009, s. 137; Dąbrowski, 2011, s. 178).

Jak wynika z przywołanych danych empirycznych, w edukacji matematycznej najczęściej mamy do czynienia z mało skutecznym modelem podającym. Dominuje transmitowanie silnie sformalizowanej wiedzy oferowanej z perspektywy nauczyciela i to w tempie, które gwarantuje planową realizację treści programowych. Nauczyciel głównie stosuje wyjaśnienia, oczekuje szybkich odpowiedzi na standardowe pytania i sprawnego posługiwania się wyćwiczonymi procedurami. Rolą ucznia jest przyswajanie podanych informacji zgodnie z zasadą: jak najwięcej, jak najszybciej, jak najdokładniej. W efekcie uczeń, zamiast być kreatywnym i odpowiedzialnym twórcą swojego rozwoju, staje się jedynie tłem dla działań nauczycielskich.

3. Sytuacje dialogiczne a konstruowanie wiedzy matematycznej

Już na początku XIX wieku Jan Henryk Pestalozzi pisał: „uczyć trzeba dziecko, a nie przedmiotu”. Kompetentny nauczyciel powinien przede wszystkim mieć świadomość, że nie tylko uczy matematyki, ale uczy za pomocą matematyki, dostarczając uczniom narzędzi służących poznaniu i rozumieniu rzeczywistości oraz jej aktywnemu przeobrażaniu. Zatem

jego wysiłek powinien się koncentrować na budowaniu środowiska uczenia się, czyli tworzeniu bezpośrednich kontekstów dla każdego zdarzenia związanego z nabywaniem doświadczeń, które stanowią fundament dla konstruowania wiedzy i kształtowania umiejętności matematycznych. W ten sposób nastąpi stopniowe matematyzowanie świata fizycznego, będącego źródłem struktur matematycznie bogatych i przejście do opisywania rzeczywistości za pomocą abstrakcyjnych pojęć matematycznych, które stanowią strukturę matematyczną znacznie zubożoną (Freudenthal, 1984).

Różnorodność zgromadzonych doświadczeń pozwala nadać intuicyjnemu rozumowaniu dziecka coraz bardziej sformalizowaną postać. Trzeba pamiętać, że myślenie symboliczne jest jeszcze dziecku rozwojowo odległe. Istnieje duża rozbieżność między abstrakcyjnością pojęć matematycznych a realnością i konkretnością myślenia dzieci w wieku wczesnoszkolnym. Dziecięce uczenie się matematyki wymaga bezpośredniego kontaktu z przedmiotami – obserwacji, manipulacji, sensorycznego poznania, które prowadzi do tworzenia własnych obrazów pojęciowych. Pełnią one rolę swoistych mediatorów zewnętrznych, za pomocą których dziecko myśli, jak również uzewnętrznia swój sposób rozumowania.

Podjęte działania z użyciem konkretnych dostarczają kontekstu znaczeniowego do rozmów na temat wykonanych czynności, poczynionych obserwacji z wykorzystaniem języka matematycznego. Jak pokazuje codzienność szkolna, ten język znaków i kodów używanych w matematyce jest bardzo hermetyczny, abstrakcyjny a przez to często bywa niezrozumiały dla dziecka. Potwierdza to amerykański psycholog Howard Gardner wskazując, że „opanowanie obowiązujących w naszym społeczeństwie systemów zapisu może być trudne dla wielu uczniów, w tym dla tych, którzy bez żadnych problemów opanowali 'wiedzę praktyczną' oraz 'systemy symboliczne pierwszego rzędu'” (2006, s. 232). Formalizm matematyczny często przeszkadza, a niekiedy wręcz uniemożliwia zrozumienie tekstu zadania, a tym samym przeprowadzenie jego analizy. Uczniowie mają problemy z połączeniem świeżo nabytej wiedzy o systemach symbolicznych z wcześniejszą wiedzą zdominowaną przez myślenie synpraktyczne. Matematyka ukryta w symbolach i formułach matematycznych nie przystaje do dziecięcych doświadczeń w poznawaniu świata. Należy stwarzać uczniom jak najwięcej naturalnych okazji do rozmów o dostrzeżonych problemach, zachęcać do precyzyjnego nazywania ich oraz wymiany pomysłów na temat możliwych rozwiązań. Ważne jest przy tym, aby pozwolić dzieciom na używanie własnego języka – języka potocznego, który jest im znaczeniowo bliski.

Matematyki uczymy w toku podjętego dyskursu. Nie chodzi tu jednak o zwyczajowe przepytywanie klasy za pomocą bezpośrednich instrukcji, ale – jak pisał profesor Robin Alexander (2001) – o „osiąganie wspólnego rozumienia za pomocą zadawania sekwencji odpowiednich pytań oraz poprzez wspólne działanie i dzielenie się koncepcjami, które ukierunkowują, pobudzają, ograniczają wybory i przyspieszają przekazywanie koncepcji i zasad” (s. 527). Partnerem tak rozumianego dialogu ramowego może być zarówno osoba dorosła o większym doświadczeniu, jak również rówieśnik prezentujący zbliżony poziom wiedzy i umiejętności.

Zgodnie z założeniami matematyki realistycznej proces poznania matematycznego powinniśmy zacząć od dostrzeżenia sytuacji problemowej, która sprowokuje do sformułowania pytań, stawiania hipotez. Dlatego ważny jest taki dobór zadań, które będą zawierały interesującą dla ucznia warstwę treściową oraz odpowiednią dla jego poziomu intelektualnego warstwę matematyczną. Natomiast sama struktura zadania powinna mieć charakter otwarty, co pozwoli wychwycić związki i zależności między zawartymi danymi liczbowymi i łączyć je na wiele różnych sposobów. Przykładem może być następujące zadanie, które ma postać rozmowy:

Ola: Ja mam 17 znaczków ze zwierzętami.

Kasia: A ja mam 24 znaczki ze zwierzętami.

Ola: Ja mam 75 znaczków w klaserze.

Kasia: Ja mam tylko 46 znaczków w klaserze.

Przedstawiona treść zadania nie ogranicza ucznia do rozpatrywania jednego, arbitralnie narzuconego pytania, lecz zachęca do sformułowania całego szeregu problemów, które wynikają z opisanego w zadaniu sytuacji. Aby podnieść efektywność procesu nauczania-uczenia się warto sięgnąć po strategię aktywnego włączania uczniów w kolejne etapy pracy z problemem.

Na początek zachęcamy uczniów, by samodzielnie przeczytali tekst i przez minutę zastanowili się, jakie pytania możemy zadać w związku z przedstawioną sytuacją. Określenie czasu do dyspozycji ucznia jest niezwykle istotne, gdyż pozwala spokojnie zebrać myśli, przeprowadzić „wewnętrzny dialog” i wygenerować ciekawe, niestandardowe pomysły. Czas jest tu sprzymierzeńcem produktywnego myślenia.

Następnie proponujemy, aby uczniowie w parach wymienili się poczynionymi spostrzeżeniami. Przedstawienie swoich pytań oraz wysłuchanie propozycji kolegów pozwoli ocenić przydatność pytania i zmodyfikować je tak, by spełniało wymogi określone w zadaniu. Sytuacja ta w naturalny sposób prowokuje do podjęcia dyskursu nakierowanego na lepsze zrozumienie i scalenie różnych sposobów określenia problemu, ujrzenie odmiennej perspektywy poznawczej, uzyskanie pewności co do poprawności własnego rozumowania. Szukając wspólnej płaszczyzny porozumienia uczniowie doskonalią umiejętności komunikacyjne związane z posługiwaniem się językiem symboli w wymiarze werbalnym i niewerbalnym. Uczą się także prawidłowego odczytywania komunikatów i adekwatnych sposobów reagowania na nie poprzez zadawanie pytań i udzielanie informacji zwrotnej. Powstałe w toku społecznej interakcji interpretacje, przekonania stanowią źródło wzajemnej inspiracji, pobudzają do podjęcia nowych wyzwań intelektualnych.

W celu uporządkowania myśli warto zachęcić uczniów, by zapisali na kartkach swoje propozycje pytań – problemów dotyczących prezentowanej treści zadania. Uczy to kontroli i refleksji nad własnym myśleniem, a także budzi odpowiedzialność za słowo, sprzyja dbałości o precyzyjne wyrażanie myśli i prowadzi do stopniowego zastępowania języka potocznego coraz bardziej precyzyjnym językiem matematyki.

Kolejnym krokiem będzie podjęcie próby samodzielnego rozwiązania zadania w sposób intelektualnie dostępny dziecku – w toku aktywnego działania na konkretach bądź za pomocą poznanych formuł matematycznych. „Nie chodzi o to, żeby znaleźć rozwiązanie, które znalazł także nauczyciel, ale o to, by przez zastosowanie ogólnych zasad w ogóle je znaleźć” (Spitzer, 2007, s. 192). Wykształcona w ten sposób elastyczność, otwartość myślenia, umiejętność generowania twórczych rozwiązań i ich wartościowania pozwoli dzieciom mierzyć się w przyszłości z dowolnymi zadaniami.

Na koniec wracamy ponownie do sytuacji dialogicznej, w której uczniowie mają okazję przedstawić własny tok rozumowania i przekonać kolegów do swojego sposobu rozwiązania. Można również poprosić, aby chętne osoby zaprezentowały swój pomysł na forum całej klasy. Wypowiedź warto ukierunkować pytaniem „Jak to zrobiłeś?” i poleceniami: wyjaśnij, przekonaj. Należy przy tym zwrócić uwagę, aby nauczyciel nie próbował odpowiadać na pytania, które sam zadał oraz unikał pytań rozstrzygnięcia, które mają niską efektywność edukacyjną. Istotną kwestią jest zachęcanie uczniów do „myślenia na głos” oraz prezentowania w rozwiniętej formie swoich pomysłów, gdyż pozwala to znacząco rozszerzyć, a jednocześnie pogłębić zakres wymiany informacji między nauczycielem i uczniami. Jednocześnie należy dać przyzwolenie na używanie języka bliskiego uczniom oraz wykazać zainteresowanie uczniowską wypowiedzią, powstrzymując się od korygowania i komentowania, gdyż to zaburza tok myślenia i wprowadza blokadę emocjonalną. Dziecko ma również prawo do błędów. Wpisane są one w proces

uczenia się. Wszystkie odpowiedzi – prawidłowe i błędne – trzeba umieć wykorzystać w rozwijaniu rozumienia. Rozważna konfrontacja z błędami stymuluje powstawanie krytycznych pytań, a stosowanie metody prób i poprawek jest skutecznym sposobem w poszukiwaniu rozwiązania zadań matematycznych.

Wchodzenie w interakcje z rówieśnikami na zajęciach z matematyki stanowi doskonałe źródło i imperatyw dla rozwoju zarówno sfery intelektualnej, jak i motywacyjnej. Dzieci chętniej wykonują zadania i szybciej generują nowe rozwiązania współdziałając ze sobą niż podczas pracy indywidualnej. Wspólna aktywność, obserwacja zachowań drugiej osoby motywuje do podejmowania działań, których jednostka samodzielnie by nie podjęła. Koledzy stają się pośrednikami między przestrzenią osobistych doświadczeń ucznia a światem zewnętrznym. Ze względu na bliskość psychiczną, łatwość kontaktu oraz podobny zasób doświadczeń, uczący się chętnie korzystają z pomocy swoich rówieśników. Wzrasta wrażliwość emocjonalna, a także akceptacja i zrozumienie dla odmienności postrzegania problemów i wielości dróg prowadzących do ich rozwiązywania.

4. Zakończenie

Komunikowanie się w matematyce jest jedną z podstawowych kompetencji, stanowi niezbędny warunek tworzenia i rozwijania pojęć i procedur, rozumnego rozwiązywania problemów, a co najważniejsze – stosowania matematyki w sytuacjach realnych. Budowanie relacji opartych na współpracy i kooperacji tworzy przestrzeń wymiany myśli, uczy precyzyjnego werbalizowania procedur z zachowaniem dbałości o logiczną poprawność wyrażanych sądów, sztuki negocjowania oraz argumentowania. Zachęca uczniów, by włączyli mechanizmy samoregulacji, które pozwolą na świadome planowanie, monitorowanie, kontrolę i ocenę stosowanych strategii poznawczych oraz zapewnią panowanie nad emocjami i utrzymanie motywacji podczas procesu uczenia się.

W matematyce ważniejsze od podania poprawnego wyniku jest wniknięcie w rzeczywisty proces poszukiwania rozwiązania zadania, pokazanie postępowania heurystycznego, bazującego na procesach myślowych dostępnych wszystkim uczniom. „Kiedy już nauczyciele dokonają takich zmian, doświadczenie pokazuje, że uczniowie stają się bardziej aktywni i w końcu zdają sobie sprawę, że uczenie się może mniej zależeć od tego, czy potrafię zauważyć lub odgadnąć prawidłową odpowiedź, a bardziej od ich gotowości do wyrażania i omówienia problemu” (Black i in., 2006, s. 54). Dialogowe podejście do edukacji pozwala odrzucić schematy szkolnego myślenia i działania hibernujące uczniowskie umysły i wejść w interakcje, które są zanurzone kontekstowo, co powoduje, że nauczanie matematyki staje się autentyczne i realistyczne.

Bibliografia:

- ALEXANDER, R.J. 2001. *Culture and Pedagogy: international comparisons in primary education*. Oxford and Boston: Blackwell, 2001, 642. s. ISBN 978-06-31220-51-0.
- BEREITER, C. 2002. *Education and Mind in the Knowledge Age*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2002. 526. s. ISBN 0-8058-3943-7.
- BLACK, P. – HARRISON, CH. – LEE, C. – MARSHALL, B. – WILIAM, D. 2006. *Jak oceniać, aby uczyć?* Warszawa: CEO, 2006. 147. s. ISBN 978-83-89623-18-8.
- BROWN, J.S. – COLLINS, A. – DUGUID, P. 1989. *Situated Cognition and the Culture of Learning*. [online]. Educational Researcher, vol.18, nr1, s. 32-34. [cit. 2013-05-04] Dostępne w Internecie: <http://www.jstor.org/discover/10.2307/1176008?uid=3738840&uid=2&uid=4&sid=21101981642303>.
- CZAJKOWSKA, M. – JASIŃSKA, A. – SITEK, M. (Eds.) *Kształcenie Nauczycieli w Polsce. Wyniki międzynarodowego badania TEDS-M 2008*. [online]. Warszawa: Instytut Filozofii i Socjologii PAN, 2010. s. 76. [cit. 2013-05-02] Dostępne w Internecie: http://www.ifispan.waw.pl/pliki/raport_z_badania_teds-m.pdf.

- DĄBROWSKI, M. (Eds.) 2011. *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Trzecioklasiści 2010. Raport z badań ilościowych*. Warszawa: CKE, 2011. 249. s. ISBN 978-83-7400-272-1.
- DAGIEL, M. – ŻYTKO, M. (Eds.) 2009. *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* Warszawa: CKE, 2009. 192. s. ISBN 978-83-7400-267-7.
- DE CORTE, E. 2013. *Historyczny rozwój myślenia o uczeniu się*. In DUMONT, H. – ISTANCE, D. – BENAVIDES, F. (Eds.) *Istota uczenia się. Wykorzystanie wyników badań w praktyce*. Warszawa: Wolters Kluwer Polska SA, 2013. s. 60-108. ISBN 9780-083-264-0709-3.
- FEDOROWICZ, M. – SITEK, M. (Eds.) 2011. *Spółeczeństwo w drodze do wiedzy. Raport o stanie edukacji 2010*. Warszawa: IBE, 2011. 358. s. ISBN 978-83-61693-06-2.
- FREUDENTHAL, H. 1984. *O strukturach w nauce i nauczaniu*. Fragmenty z referatu H. Freudenthala wygłoszonego przez niego w czasie wizyty w krakowskiej WSP w 1984. Spisał i tłumaczył Stefan Turnau [online]. [cit. 2013-05-04] Dostępne w Internecie: www.if.uj.edu.pl/~meyer/psychologia/w5.doc.
- GARDNER, H. 2009. *Inteligencje wielorakie. Nowe horyzonty w teorii i praktyce*. Warszawa: Wydawnictwo Laurum, 2009. 367. s. ISBN 978-83-61732-04-4.
- GRUSZCZYK-KOLCZYŃSKA, E. 2011. Projekt badawczy: *Wspomaganie rozwoju umysłowego wraz z edukacją matematyczną dzieci w klasie zerowej i w pierwszym roku nauki szkolnej MNiSW 2006-2009*; Projekt badawczy: *Rozpoznawanie i wspomaganie rozwoju uzdolnień do uczenia się matematyki u starszych przedszkolaków i małych uczniów MNiSW 2007-2010*. In FEDOROWICZ, M. – SITEK, M. (Eds.), *Spółeczeństwo w drodze do wiedzy. Raport o stanie edukacji 2010*. Warszawa: IBE, 2011. s. 329-330. ISBN 978-83-61693-06-2.
- HÜTER, G. 2009. *Kształcenie metakompetencji i funkcji ludzkiego Ja w okresie dzieciństwa*. In NEIDER, A. (Eds.) *Edukacja to więcej niż uczenie się. Przedszkole i szkoła w dialogu*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2009. 165. s. ISBN 978-83-7308-786-6.
- KONARZEWSKI, K. 2012. *Raport TIMSS i PIRLS 2011. Osiągnięcia szkolne polskich trzecioklasistów w perspektywie międzynarodowej*. Warszawa: CKE, 2012. 140. s. ISBN 978-83-7400-277-6.
- SPITZER, M. 2007. *Jak uczy się mózg*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007. 350. s. ISBN 978-83-01-15261-1.
- TURNAU, I. – TURNAU, S. 2012. *Matematyka realistyczna. Program nauczania matematyki dla II etapu edukacyjnego - klasy IV-VI szkoły podstawowej*. [online]. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2012. s.23. [cit. 2013-05-04] Dostępne w Internecie: http://www.ore.edu.pl/strona-ore/index.php?option=com_phocadownload&view=category&download=1666:matematyka-realistyczna.-program-nauczania-matematyki-dla-ii-etapu-edukacyjnego-klasy-iv-vi-szkoy-podstawowej&id=47:programy-nauczania&Itemid=992&start=60
- WOOD, D. 2006. *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, 2006, 292. s. ISBN 978-83-233-2158-3.

Adres

Jolanta Nowak, doktor
Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy
Instytut Pedagogiki
Zakład Pedagogiki Przedszkolnej
ul. Chodkiewicza 30
85 – 069 Bydgoszcz
e-mail: nowakjolanta@wp.pl